1	2	3	4	5	Calificación

Apellido y Nombre: Turno:
Nro. de libreta:

Álgebra Lineal - 2do. cuatrimestre 2019
Primer recuperatorio (06/12/2019)

---

1. Sean $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ y $g : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ transformaciones lineales, y sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3\}$, $\mathcal{B}'' = \{w_1 - w_2, w_1 + w_3, w_1 + w_2 + w_3\}$ bases de $\mathbb{Q}^3$. Supongamos que

$$|f|_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ |g|_{\mathcal{B}''\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (i) Calcular una base para $\mathrm{Im}(g \circ f)$.

   (ii) Decidir si existen bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ de $\mathbb{Q}^3$ tales que

$$|g|_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que existe una matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $AB = 0$ y $\mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B) = n$.

3. Sea $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ una base de $(\mathbb{R}_3[x])^*$ y definamos $\psi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^4$ por $\psi(p) = (\varphi_1(p), \varphi_2(p), \varphi_3(p), \varphi_4(p))$ para cada $p \in \mathbb{R}_3[x]$.

   a) Sabiendo que p_1, p_2 son polinomios en $\mathbb{R}_3[x]$ tales que

$$\psi(p_1) = (2, 1, -1, 0),$$
$$\psi(p_2) = (1, 0, 1, 0),$$

   calcular $\langle p_1, p_2\rangle^\circ$.

   b) Si los polinomios p_3, p_4 de $\mathbb{R}_3[x]$ verifican que $\langle p_3, p_4\rangle^\circ = \langle -3\varphi_1 + 2\varphi_2 - 2\varphi_4, 2\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 + \varphi_4\rangle$, probar que el conjunto $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ forma una base de $\mathbb{R}_3[x]$.

4. Calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \dots & n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \dots & n^{2n-1} \end{pmatrix}.$$

5. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En cualquier caso, justificar.

   a) Sea $\varphi \in (\mathbb{R}_n[x])^*$ tal que $\varphi(p) = 0$ para todo $p \in \mathbb{R}_n[x]$ de grado n. Entonces $\varphi = 0$.

   b) Dada $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, existe una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $A^2 + I_3 = B$.

   c) Sean $A, B \in K^{5\times 5}$ tales que $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(A) = 4$. Entonces, B es inversible.

Justificar todas las respuestas